

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/270642529>

# Analysis of Variation of Stress Intensity Factor of Oblique Semi-Elliptical Surface Crack Using Singular Integral Equation Method.

**Article** in *Nihon Kikai Gakkai Ronbunshu, A Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A* · June 1995

DOI: 10.1299/kikaia.61.1232

CITATIONS

8

READS

11

2 authors, including:



**Nao-Aki Noda**

Kyushu Institute of Technology

695 PUBLICATIONS 3,769 CITATIONS

SEE PROFILE

# 特異積分方程式による半だ円表面き裂先端の 応力拡大係数の分布の解析\*

野 田 尚 昭<sup>\*1</sup>, 三 好 伸 介<sup>\*2</sup>

## Analysis of Variation of Stress Intensity Factor along Crack Front of Semi-Elliptical Surface Crack using Singular Integral Equation Method

Nao-Aki NODA and Shinsuke MIYOSHI

In this paper, a singular integral equation method is applied to calculate the distribution of stress intensity factor along the crack front of a 3-D semi-elliptical surface crack. The stress field induced by the body force doublet in a semi-infinite body is used as the fundamental solution. Then, the problem is formulated as an integral equation with a singularity of the form of  $r^{-3}$ . In the numerical calculation, the unknown-function of the density of body force doublet is approximated by the product of fundamental density function and a polynomial. The smooth distributions of stress intensity factors for various aspect ratios of the surface crack are obtained by the present method. The calculation shows that the present method gives rapidly converging numerical results. The boundary condition is sufficiently satisfied throughout the crack boundary.

**Key Words:** Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Semi-Elliptical Surface Crack, Singular Integral Equation, Numerical Solution, Fundamental Density Function, Polynomial

### 1. 緒 言

圧力容器や一般の機械構造物など実際の材料強度の問題では、材料表面近くの内部き裂や表面き裂が破壊の起点となることが多いため、それらの厳しきのパラメータである応力拡大係数を知ることが脆性破壊や疲労き裂の発生・進展の解析・予測のため極めて重要である。そして実際問題として重要な三次元き裂についても内部き裂・表面き裂は、その多くがそれぞれだ円き裂半だ円き裂で近似でき、それらの応力拡大係数を求めるさまざまな解析法が考え出され、これまで多くの報告がなされている<sup>(1)~(11)</sup>。

二次元き裂問題に比べて三次元き裂問題の解析には多くの困難を伴うが、西谷・村上<sup>(1)</sup> ははじめて体積力法を応用し、三次元だ円き裂、半だ円き裂の解を与えた。特異積分方程式を用いて三次元問題を扱う試みも Weaver<sup>(2)</sup>、林ら<sup>(3)</sup>、高久田ら<sup>(11)</sup> により行われている。また石田・野口ら<sup>(7)(8)</sup> は体積力法による三次元き裂の高精度の解析法を最近提案している。

著者の一人は、二次元のき裂問題を解く際に、体積力法を用いてその特異積分方程式の未知関数を多項式と基本密度関数の積で近似して解析を行い、それまでの解析より精度の高い結果が得られることを報告した<sup>(13)~(15)</sup>。また体積力法における応力集中問題の特異積分方程式を数値的に精度よく解析する方法を示し、境界上のなめらかな応力分布が得られることを示した<sup>(16)(17)</sup>。

そこで本報では、三次元き裂の問題において、体積力法の特異積分方程式の未知関数である体積力密度を多項式と基本密度関数の積の形で近似する解析法の有効性を検討し、その特異性の処理の仕方について述べる。そして境界条件を満足するように多項式の係数を求めることによってき裂先端の応力拡大係数の正確な分布を求めることを目的とする。これまでに応力拡大係数の分布については種々の方法により解析が行われているがそれらの結果にはかなり違いが認められる。またその最大値も正確には与えられていない。

### 2. 特異積分方程式とその数値解析法

**2・1 体積力法の特異積分方程式** 図 1 のように  $xz$  平面を自由表面にとり、 $xy$  平面に主軸長  $2a$ 、深さ  $b$  の半だ円表面き裂を有する半無限体の  $o-xyz$  座標

\* 平成 6 年 11 月 5 日 北九州地方講演会において講演、原稿受付 平成 6 年 10 月 11 日。

\*1 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

\*2 学生員、九州工業大学大学院。

系を定義する  $[(\xi, \eta, \zeta)]$  は着力点の  $(x, y, z)$  座標である。  $x$  方向,  $z$  方向および  $y$  軸の正の方向に無限に広がっている半無限体が,  $|z| \rightarrow \infty$  で一様な引張応力  $\sigma_z$  を受ける場合を解析の対象とする。このとき問題は, き裂が存在しない半無限体中において, き裂となるべき仮想境界上に分布させた  $z$  方向の標準型体積力対の密度  $f(\xi, \eta)$  を未知関数とする以下の特異積分方程式で表現される。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{H}{2\pi} \left[ \iint_S \frac{f(\xi, \eta)}{r_1^3} d\xi d\eta \right. \\ & \quad \left. + \iint_S K(\xi, \eta, x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = -\sigma_z^\infty \\ & K(\xi, \eta, x, y) \\ & \quad = -\frac{5-20\nu+24\nu^2}{r_2^3} + \frac{12(1-\nu)(1-2\nu)}{r_2(r_2+y+\eta)^2} \\ & \quad + \frac{6\{3y\eta-2\nu(1-2\nu)(y+\eta)^2\}}{r_2^5} \\ & r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\ & r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \\ & H = (1-2\nu)/4(1-\nu)^2 \\ & S = \{(\xi, \eta) | (\xi/a)^2 + (\eta/b)^2 \leq 1, \eta \geq 0\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

式(1)は仮想き裂上における境界条件  $\sigma_z=0$  に相当しており, 左辺の第1項は無限体中のだ円き裂の存在を表現し, 注目点  $(x, y)$  と着力点  $(\xi, \eta)$  が一致するときに特異性を示す特異項であり,  $\iint_S$  は発散積分の有限部分を表す\*\*1。第2項の  $K(\xi, \eta, x, y)$  は自由表面の境界条件を満足させる関数である。  $S$  はき裂のない半無限体中に想定した半だ円き裂となるべき仮想き裂面

を表している。

## 2・2 これまでの体積力法の数値解析法 西谷・村上<sup>(1)</sup>, 村上・石田<sup>(6)</sup>, 石田ら<sup>(4)(5)</sup> の解析ではき裂領域を

図2(a), (b)のように分割し,  $j$  番目の要素の体積力対密度  $f^{(j)}(\xi, \eta)$  を以下のように階段関数で近似してきた。

$$\left. \begin{aligned} f^{(j)}(\xi, \eta) &= f_j \cdot w(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) &= \frac{b\sigma_z^\infty}{H\Phi} \sqrt{1-(\xi/a)^2 - (\eta/b)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

ここに  $\Phi$  は  $E(k)$ ,  $E(k')$  を第二種の完全だ円積分として次式で与えられる。

$$\Phi = \begin{cases} E(k), k = \sqrt{1-(b/a)^2} & (a \geq b) \\ \frac{b}{a} E(k'), k' = \sqrt{1-(a/b)^2} & (a < b) \end{cases} \dots\dots\dots (2\cdot b)$$

$w(\xi, \eta)$  は基本密度関数と呼ばれ, 無限体中のだ円き裂の応力場を厳密に表現するもので, き裂先端近傍の固有な応力場を表すため, 高精度の解析を行うには不可欠なものである。式(2)の  $f_j (j=1, 2, 3, \dots)$  は要素ごとに固有の値をとる階段関数で仮定された重みである。この方法では, き裂形状を系統的に要素分割し, 分割数無限大の場合を直線外挿にすることにより, その応力拡大係数が求められてきた。

図2(a), (b)で示されるような階段関数による近似では, 重みが要素境界に沿って不連続になるため, 滑らかに変化しているべき体積力密度の表現が不十分で, 複雑な問題における精度と有効性を悪くしている。そこで石田・野口らは次式のように体積力対の密度を近似した<sup>(7)(8)</sup>。

$$f^{(j)}(\xi, \eta) = F_j(\xi, \eta) w(\xi, \eta) \dots\dots\dots (3)$$

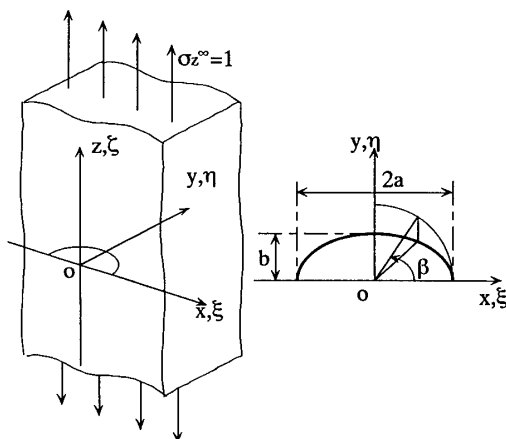


図1 解析対象

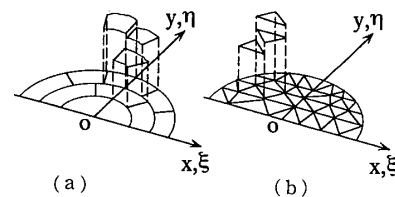


図2 階段関数による重み関数の近似

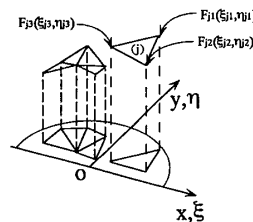


図3 折れ面関数による重み関数の近似

\*\*1 特異積分の計算において発散積分の有限部分を計算することは無限体中の仮想き裂面上に体積力対を分布させたときのその無限小外側における応力を積分して求めることに相当する。



$$\begin{aligned}
& \xi' = \xi/a, \eta' = \eta/b, x' = x/a, y' = y/b \\
& \left. \begin{aligned}
& \sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} = \sqrt{1-x'^2-y'^2} - \frac{x'}{\sqrt{1-x'^2-y'^2}}(\xi'-x') - \frac{y'}{\sqrt{1-x'^2-y'^2}}(\eta'-y') \\
& - \frac{1}{\sqrt{1-x'^2-y'^2}(\sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} + \sqrt{1-x'^2-y'^2})} \left[ \frac{(1-y'^2)(\xi'+x')}{(x'\sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} + \xi'\sqrt{1-x'^2-y'^2})} \cdot (\xi'-x')^2 \right. \\
& + \left\{ \frac{x'^2(\eta'+y')}{(x'\sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} + \xi'\sqrt{1-x'^2-y'^2})} + \frac{y'^2(\xi'+x')}{(y'\sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} + \eta'\sqrt{1-x'^2-y'^2})} \right\} (\xi'-x')(\eta'-y') \\
& + \frac{(1-x'^2)(\eta'+y')}{(y'\sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} + \eta'\sqrt{1-x'^2-y'^2})} \cdot (\eta'-y')^2 \Big] = S_{00}(x', y') + S_{10}(x', y') \cdot (\xi'-x') \\
& + S_{11}(x', y') \cdot (\eta'-y') + S_{20}(\xi', \eta', x', y') \cdot (\xi'-x')^2 + S_{21}(\xi', \eta', x', y') \cdot (\xi'-x')(\eta'-y') \\
& + S_{22}(\xi', \eta', x', y') \cdot (\eta'-y')^2 \\
& \xi'^{2n} = x'^{2n} + 2nx'^{2n-1} \cdot (\xi'-x') + \sum_{i=0}^{2n-2} \{(i+1) \cdot \xi'^{(2n-2-i)} \cdot x'^i\} \cdot (\xi'-x')^2 \\
& = b_0(x') + b_1(x') \cdot (\xi'-x') + b_2(\xi', x') \cdot (\xi'-x')^2 \\
& \eta'^n = y'^n + ny'^{n-1} \cdot (\eta'-y') + \sum_{i=0}^{n-2} \{(i+1) \cdot \eta'^{(n-2-i)} \cdot y'^i\} \cdot (\eta'-y')^2 \\
& = c_0(y') + c_1(y') \cdot (\eta'-y') + c_2(\eta', y') \cdot (\eta'-y')^2
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

ここで重要なことは、上記のそれぞれの構成要素を $(\xi'-x')$ もしくは $(\eta'-y')$ についての関数と見たとき、零次、1次の係数が注目点の位置 $(x', y')$ のみにより決定され、積分変数 $\xi, \eta$ に無関係な形で表されることである。

次に $(\xi-x) = r \cdot \cos \theta$ ,  $(\eta-y) = r \cdot \sin \theta$  (図5参照)により注目点 $(x, y)$ を原点とする極座標に変換することで次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
& \sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} = A_0 + A_1(\theta) \cdot r + A_2(r, \theta) \cdot r^2 \\
& \xi'^{2n} = B_{0i} + B_{1i}(\theta) \cdot r + B_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \\
& \eta'^n = C_{0i} + C_{1i}(\theta) \cdot r + C_{2i}(r, \theta) \cdot r^2
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

ここで $A_0, A_1(\theta)$ を例にとると式(11・b)のように表される。

$$A_0 = \sqrt{1-x'^2-y'^2}, A_1(\theta) = -\frac{x'}{\sqrt{1-x'^2-y'^2}} \cos \theta - \frac{y'}{\sqrt{1-x'^2-y'^2}} \sin \theta \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

式(11・a)の組合せにより、式(9)の $A_{1i}$ における基本密度関数と重み関数の積は次のように表される。

$$G_i(\xi', \eta') \sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2} = D_{0i} + D_{1i}(\theta) \cdot r + D_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \dots\dots\dots (12)$$

$D_{0i}, D_{1i}(\theta)$ は $A_0, A_1(\theta), B_{0i}, B_{1i}(\theta), C_{0i}, C_{1i}(\theta)$ の組合せにより、また $D_{2i}(r, \theta)$ は $A_0 \sim C_{2i}(r, \theta)$ の組合せにより表せられる。式(12)を式(9)に代入し、積分変数についても同様の座標変換を行い次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
& A_{1i} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left[ \frac{D_{0i}}{r^2} + \frac{D_{1i}(\theta)}{r} \right] dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} [D_{2i}(r, \theta)] dr d\theta = A_{ai} + A_{bi} \\
& R(\theta) = \frac{\{ -((x \cdot \cos \theta/a^2) + (y \cdot \sin \theta/b^2)) + \sqrt{(\cos \theta/a)^2 + (\sin \theta/b)^2} - [(x \cdot \sin \theta - y \cdot \cos \theta)/(a \cdot b)]^2 \}}{(\cos \theta/a)^2 + (\sin \theta/b)^2}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$A_{bi}$ は特異性がないので数値積分によりその値を求める。 $A_{ai}$ は $r \rightarrow 0$ で特異性を有するが、被積分関数が特異性を有する方向の積分定数 $r$ について-1乗、-2乗だけの形で現せているためHadamardの有限部分の概念(Pf積分)<sup>(12)</sup>を用いて次式のように表すことができる。

$$A_{ai} = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{D_{0i}}{R(\theta)} + D_{1i}(\theta) \cdot \log(R(\theta)) \right] d\theta \dots\dots\dots (14)$$

こうして結局 $A_{ai}$ は特異性のない線積分として通常の数値積分で求めることができるようになる。

#### 4. 数値計算結果と検討

以上の理論に基づいて計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ $n$ を変化させて図1の形状パラメータ $b/a = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ について数値計算を行った。式(8)~(14)の数値積分には二重指数関数形積分公式(FACOM SSL2 AQE)等のサブルーチンを用いた。結果として得られた応力拡大係数 $K_I$ をまとめるに際して次の

二つの無次元値  $M_I$ ,  $F_I$  を用いた.

$$\left. \begin{aligned} M_I &= \frac{K_I(\beta)}{K_{IE}(\beta)} = F(\xi', \eta')|_{\xi'=\cos \beta, \eta'=\sin \beta} \\ K_{IE}(\beta) &= \frac{\sigma_z \sqrt{\pi b}}{\Phi} \left[ \sin^2 \beta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \beta \right]^{1/4} \\ F_I &= \frac{K_I(\beta)}{\sigma_z \sqrt{\pi b}} = \frac{F(\xi', \eta')|_{\xi'=\cos \beta, \eta'=\sin \beta}}{\Phi} \\ &\quad \times \left[ \sin^2 \beta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \beta \right]^{1/4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$M_I$  は  $K_I$  を無限体中のだ円き裂の応力拡大係数  $K_{IE}$

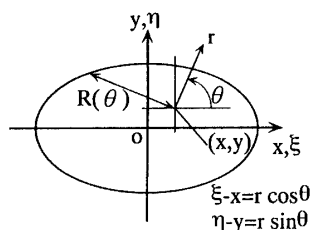
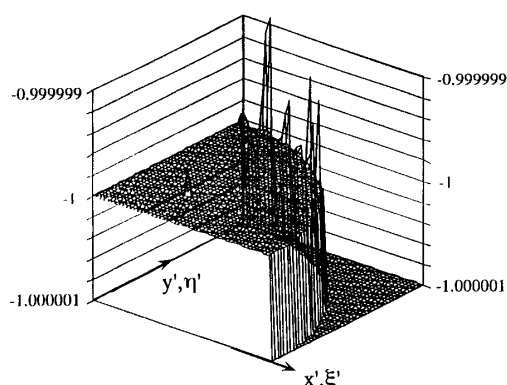
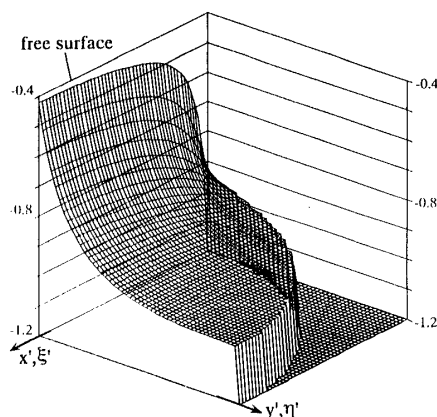


図 5 座標変換



$$\frac{b}{2\pi\Phi} \iint_{S+S_c} G_i(\xi', \eta') \frac{\sqrt{1-\xi'^2-\eta'^2}}{r^3} d\xi d\eta, G_i(\xi', \eta')=1$$

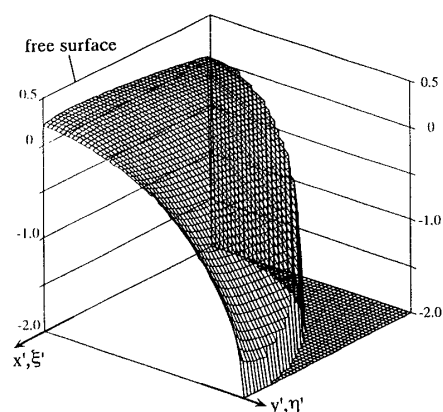
図 6 積分値



$$\frac{b}{2\pi\Phi} \{A_i + B_i\}, G_i(\xi', \eta')=1$$

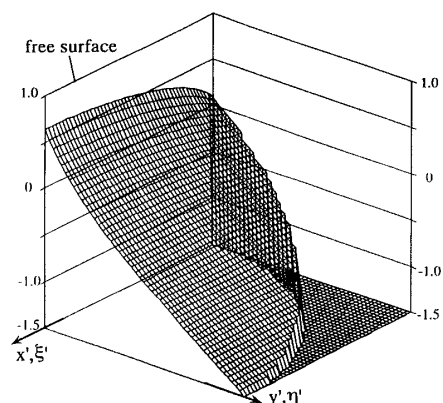
図 7 積分値

で無次元化した値である。 $M_I$  は自由表面の影響を直接表す無次元量であり、分母に形状によって値が変化する  $\Phi$ ,  $b/a$  が含まれているため形状の変化による比較には不向きである。そこで  $K_I$  の絶対値の比較には無限板中の長さ  $2b$  の二次元き裂の応力拡大係数  $K_I$  で無次元化した値である  $F_I$  を用いた。なお、本報ではポ



$$\frac{b}{2\pi\Phi} \{A_i + B_i\}, G_i(\xi', \eta')=\xi'^2$$

図 8 積分値



$$\frac{b}{2\pi\Phi} \{A_i + B_i\}, G_i(\xi', \eta')=\eta'$$

図 9 積分値

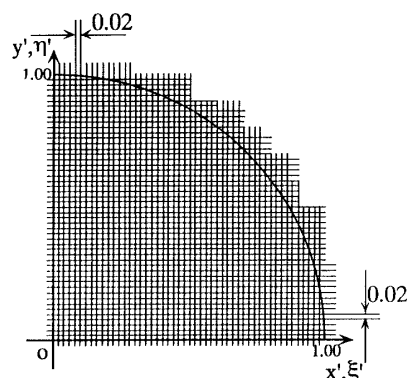


図 10 注目点の取り方

アソン比  $\nu=0.3$  として計算した。

本解析では式(9)の  $A_i$  で表される特異積分を数値的に積度よく求めることが重要である。そこで式(9)の  $A_i$  の  $G_i(\xi', \eta')=1$  の数値積分により得られた  $A_i \cdot b/(2\pi\phi)$  の値を仮想き裂全面について調べたものを図6に示す( $b/a=1.0$  のとき)。このときの積分値は一様な引張り  $\sigma_z=1$  を受ける無限体中のだ円き裂を、仮想境界上に分布させた体積力対の基本密度関数  $w(\xi, \eta)$ (厳密解)により表現するときの  $\sigma_z$  に相当す

る。したがってその理論値は-1であり、図6のとおりき裂のほぼ全面について10けた以上、き裂前縁のごく近傍でも6けた以上一致しており特異性の処理方法の有効性と数値積分の精度が確認できる。

次に形状比  $b/a=1.0$  のとき、 $G_i(\xi', \eta')=1$ ,  $G_i(\xi', \eta')=\xi'$ ,  $G_i(\xi', \eta')=\eta'$  のそれぞれの場合について連立方程式(8)の重みとなる  $(A_i+B_i) \cdot b/(2\pi\phi)$  の値を仮想き裂全面にわたって調べた結果を図7~9に示す。図のように重みは滑らかな関数として表されており、

表 1 き裂前縁に沿った無次元化応力拡大係数  $F_I$  の収束性

(a)  $b/a=1.0, \nu=0.3$

$$F_I = K_I(\beta) / (\sigma_z \sqrt{\pi b})$$

| $\beta$ (deg) | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 15      | 20      | 25      |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n             |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 8             | 0.75013 | 0.74463 | 0.74051 | 0.73730 | 0.73467 | 0.73230 | 0.73002 | 0.72768 | 0.72522 | 0.72261 | 0.70822 | 0.69599 | 0.68841 |
| 9             | 0.74732 | 0.74320 | 0.74023 | 0.73788 | 0.73572 | 0.73352 | 0.73112 | 0.72847 | 0.72557 | 0.72248 | 0.70708 | 0.69637 | 0.68930 |
| 10            | 0.74560 | 0.74287 | 0.74092 | 0.73913 | 0.73715 | 0.73480 | 0.73204 | 0.72892 | 0.72555 | 0.72208 | 0.70671 | 0.69702 | 0.68914 |
| 11            | 0.74375 | 0.74244 | 0.74140 | 0.74003 | 0.73808 | 0.73548 | 0.73236 | 0.72887 | 0.72523 | 0.72160 | 0.70699 | 0.69722 | 0.68851 |
| 12            | 0.74305 | 0.74309 | 0.74272 | 0.74147 | 0.73926 | 0.73624 | 0.73266 | 0.72882 | 0.72498 | 0.72131 | 0.70739 | 0.69716 | 0.68837 |
| 13            | 0.74112 | 0.74283 | 0.74330 | 0.74230 | 0.74000 | 0.73673 | 0.73291 | 0.72889 | 0.72495 | 0.72128 | 0.70764 | 0.69709 | 0.68846 |
| 14            | 0.74075 | 0.74376 | 0.74471 | 0.74370 | 0.74112 | 0.73753 | 0.73341 | 0.72921 | 0.72519 | 0.72152 | 0.70777 | 0.69689 | 0.68860 |
| 15            | 0.74009 | 0.74409 | 0.74528 | 0.74413 | 0.74131 | 0.73751 | 0.73332 | 0.72915 | 0.72524 | 0.72169 | 0.70782 | 0.69678 | 0.68873 |
| 16            | 0.74170 | 0.74623 | 0.74731 | 0.74573 | 0.74241 | 0.73818 | 0.73368 | 0.72932 | 0.72532 | 0.72174 | 0.70781 | 0.69684 | 0.68881 |
| 17            | 0.74165 | 0.74667 | 0.74750 | 0.74644 | 0.74238 | 0.73807 | 0.73341 | 0.72926 | 0.72522 | 0.72174 | 0.70782 | 0.69692 | 0.68891 |
| 18            | 0.74127 | 0.74647 | 0.74765 | 0.74589 | 0.74232 | 0.73791 | 0.73335 | 0.72906 | 0.72518 | 0.72172 | 0.70779 | 0.69696 | 0.68892 |
| 19            | 0.74185 | 0.74657 | 0.74747 | 0.74557 | 0.74192 | 0.73760 | 0.73326 | 0.72925 | 0.72495 | 0.72162 | 0.70781 | 0.69693 | 0.68890 |
| $\beta$ (deg) | 30      | 35      | 40      | 45      | 50      | 55      | 60      | 65      | 70      | 75      | 80      | 85      | 90      |
| n             |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 8             | 0.68298 | 0.67740 | 0.67223 | 0.66881 | 0.66689 | 0.66512 | 0.66288 | 0.66087 | 0.65981 | 0.65945 | 0.65903 | 0.65835 | 0.65800 |
| 9             | 0.68254 | 0.67647 | 0.67253 | 0.66992 | 0.66712 | 0.66425 | 0.66235 | 0.66140 | 0.66047 | 0.65927 | 0.65847 | 0.65841 | 0.65853 |
| 10            | 0.68192 | 0.67692 | 0.67332 | 0.66962 | 0.66638 | 0.66444 | 0.66303 | 0.66135 | 0.65992 | 0.65928 | 0.65892 | 0.65836 | 0.65803 |
| 11            | 0.68195 | 0.67738 | 0.67300 | 0.66924 | 0.66681 | 0.66472 | 0.66255 | 0.66109 | 0.66029 | 0.65939 | 0.65858 | 0.65840 | 0.65850 |
| 12            | 0.68224 | 0.67712 | 0.67267 | 0.66954 | 0.66686 | 0.66436 | 0.66270 | 0.66144 | 0.66007 | 0.65918 | 0.65882 | 0.65838 | 0.65808 |
| 13            | 0.68231 | 0.67697 | 0.67277 | 0.66960 | 0.66670 | 0.66447 | 0.66278 | 0.66121 | 0.66016 | 0.65939 | 0.65865 | 0.65852 | 0.65871 |
| 14            | 0.68230 | 0.67691 | 0.67288 | 0.66950 | 0.66671 | 0.66457 | 0.66267 | 0.66128 | 0.66020 | 0.65923 | 0.65871 | 0.65828 | 0.65797 |
| 15            | 0.68223 | 0.67703 | 0.67294 | 0.66947 | 0.66677 | 0.66448 | 0.66268 | 0.66127 | 0.66012 | 0.65937 | 0.65872 | 0.65845 | 0.65852 |
| 16            | 0.68221 | 0.67706 | 0.67294 | 0.66948 | 0.66675 | 0.66453 | 0.66272 | 0.66124 | 0.66016 | 0.65935 | 0.65875 | 0.65850 | 0.65846 |
| 17            | 0.68219 | 0.67711 | 0.67291 | 0.66950 | 0.66676 | 0.66455 | 0.66274 | 0.66123 | 0.66020 | 0.65934 | 0.65871 | 0.65824 | 0.65848 |
| 18            | 0.68219 | 0.67710 | 0.67291 | 0.66949 | 0.66677 | 0.66455 | 0.66272 | 0.66126 | 0.66016 | 0.65929 | 0.65868 | 0.65827 | 0.65846 |
| 19            | 0.68216 | 0.67708 | 0.67287 | 0.66950 | 0.66674 | 0.66456 | 0.66270 | 0.66130 | 0.66014 | 0.65928 | 0.65871 | 0.65834 | 0.65847 |

(b)  $b/a=0.25, \nu=0.3$

$$F_I = K_I(\beta) / (\sigma_z \sqrt{\pi b})$$

| $\beta$ (deg) | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 15      | 20      | 25      |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n             |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 8             | 0.60621 | 0.59222 | 0.58234 | 0.57610 | 0.57302 | 0.57266 | 0.57459 | 0.57843 | 0.58379 | 0.59038 | 0.63259 | 0.67765 | 0.72145 |
| 9             | 0.60549 | 0.59067 | 0.58055 | 0.57448 | 0.57184 | 0.57206 | 0.57458 | 0.57896 | 0.58475 | 0.59160 | 0.63305 | 0.67681 | 0.72146 |
| 10            | 0.60387 | 0.58851 | 0.57845 | 0.57283 | 0.57083 | 0.57172 | 0.57486 | 0.57971 | 0.58580 | 0.59276 | 0.63312 | 0.67656 | 0.72217 |
| 11            | 0.60357 | 0.58762 | 0.57754 | 0.57221 | 0.57062 | 0.57191 | 0.57536 | 0.58038 | 0.58650 | 0.59337 | 0.63279 | 0.67658 | 0.72257 |
| 12            | 0.60380 | 0.58719 | 0.57703 | 0.57190 | 0.57060 | 0.57214 | 0.57573 | 0.58077 | 0.58679 | 0.59348 | 0.63216 | 0.67658 | 0.72271 |
| 13            | 0.60437 | 0.58700 | 0.57663 | 0.57156 | 0.57042 | 0.57210 | 0.57575 | 0.58075 | 0.58665 | 0.59318 | 0.63153 | 0.67657 | 0.72258 |
| 14            | 0.60381 | 0.58592 | 0.57563 | 0.57090 | 0.57015 | 0.57213 | 0.57594 | 0.58096 | 0.58679 | 0.59319 | 0.63129 | 0.67671 | 0.72250 |
| 15            | 0.60383 | 0.58551 | 0.57527 | 0.57077 | 0.57024 | 0.57237 | 0.57623 | 0.58124 | 0.58700 | 0.59333 | 0.63150 | 0.67673 | 0.72225 |
| 16            | 0.60186 | 0.58365 | 0.57380 | 0.56976 | 0.56963 | 0.57203 | 0.57604 | 0.58110 | 0.58685 | 0.59315 | 0.63141 | 0.67676 | 0.72230 |
| 17            | 0.60111 | 0.58274 | 0.57313 | 0.56943 | 0.56964 | 0.57212 | 0.57617 | 0.58119 | 0.58687 | 0.59312 | 0.63141 | 0.67671 | 0.72230 |
| 18            | 0.60114 | 0.58256 | 0.57303 | 0.56949 | 0.56975 | 0.57235 | 0.57638 | 0.58132 | 0.58693 | 0.59312 | 0.63153 | 0.67668 | 0.72226 |
| 19            | 0.59957 | 0.58222 | 0.57307 | 0.56939 | 0.56941 | 0.57215 | 0.57624 | 0.58119 | 0.58678 | 0.59297 | 0.63157 | 0.67664 | 0.72228 |
| $\beta$ (deg) | 30      | 35      | 40      | 45      | 50      | 55      | 60      | 65      | 70      | 75      | 80      | 85      | 90      |
| n             |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 8             | 0.76520 | 0.80743 | 0.84532 | 0.87847 | 0.90846 | 0.93595 | 0.95985 | 0.97928 | 0.99472 | 1.00701 | 1.01623 | 1.02190 | 1.02298 |
| 9             | 0.76617 | 0.80751 | 0.84438 | 0.87825 | 0.90938 | 0.93646 | 0.95918 | 0.97854 | 0.99494 | 1.00767 | 1.01636 | 1.02135 | 1.02356 |
| 10            | 0.76655 | 0.80699 | 0.84437 | 0.87895 | 0.90945 | 0.93586 | 0.95917 | 0.97915 | 0.99509 | 1.00722 | 1.01613 | 1.02168 | 1.02318 |
| 11            | 0.76640 | 0.80690 | 0.84469 | 0.87889 | 0.90911 | 0.93601 | 0.95943 | 0.97891 | 0.99483 | 1.00746 | 1.01642 | 1.02155 | 1.02369 |
| 12            | 0.76622 | 0.80697 | 0.84476 | 0.87866 | 0.90909 | 0.93614 | 0.95928 | 0.97883 | 0.99503 | 1.00745 | 1.01618 | 1.02170 | 1.02332 |
| 13            | 0.76599 | 0.80401 | 0.84465 | 0.87857 | 0.90921 | 0.93606 | 0.95921 | 0.97902 | 0.99498 | 1.00729 | 1.01637 | 1.02170 | 1.02360 |
| 14            | 0.76599 | 0.80704 | 0.84453 | 0.87866 | 0.90921 | 0.93599 | 0.95934 | 0.97892 | 0.99491 | 1.00750 | 1.01628 | 1.02164 | 1.02347 |
| 15            | 0.76600 | 0.80705 | 0.84458 | 0.87870 | 0.90917 | 0.93608 | 0.95929 | 0.97887 | 0.99499 | 1.00740 | 1.01627 | 1.02168 | 1.02343 |
| 16            | 0.76606 | 0.80698 | 0.84460 | 0.87869 | 0.90916 | 0.93608 | 0.95927 | 0.97892 | 0.99500 | 1.00738 | 1.01628 | 1.02165 | 1.02351 |
| 17            | 0.76607 | 0.80696 | 0.84460 | 0.87867 | 0.90918 | 0.93604 | 0.95927 | 0.97894 | 0.99496 | 1.00740 | 1.01624 | 1.02163 | 1.02348 |
| 18            | 0.76609 | 0.80694 | 0.84462 | 0.87868 | 0.90918 | 0.93604 | 0.95928 | 0.97891 | 0.99496 | 1.00740 | 1.01624 | 1.02164 | 1.02344 |
| 19            | 0.76609 | 0.80692 | 0.84461 | 0.87867 | 0.90918 | 0.93603 | 0.95928 | 0.97887 | 0.99497 | 1.00738 | 1.01624 | 1.02165 | 1.02339 |

表 2 き裂前縁における無次元化応力拡大係数  $F_I(\nu=0.3)$ 

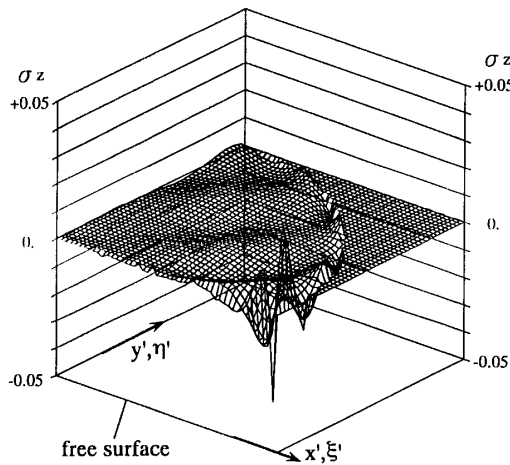
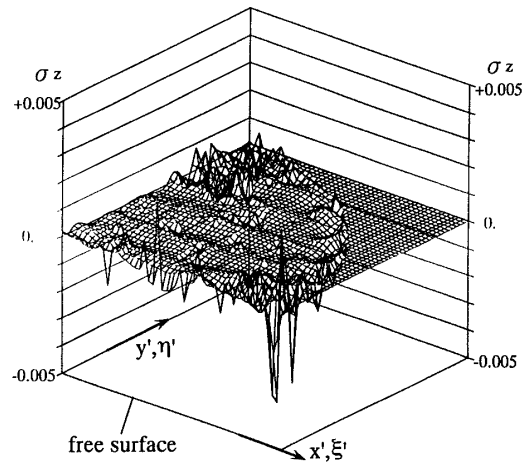
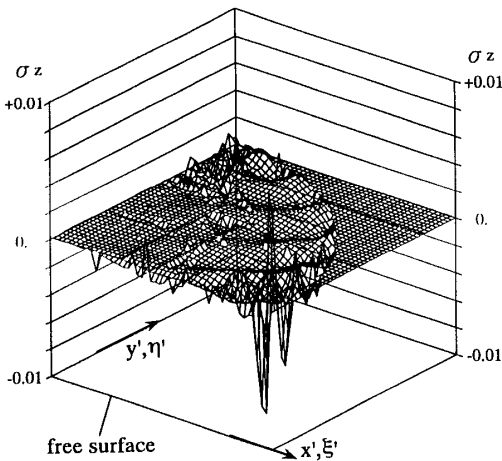
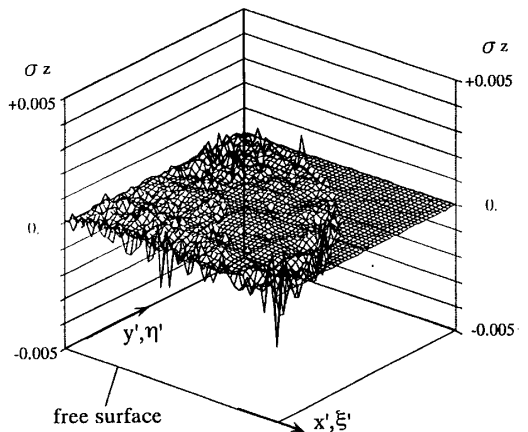
$$F_I = K_I(\beta) / (\sigma_z \sqrt{\pi b})$$

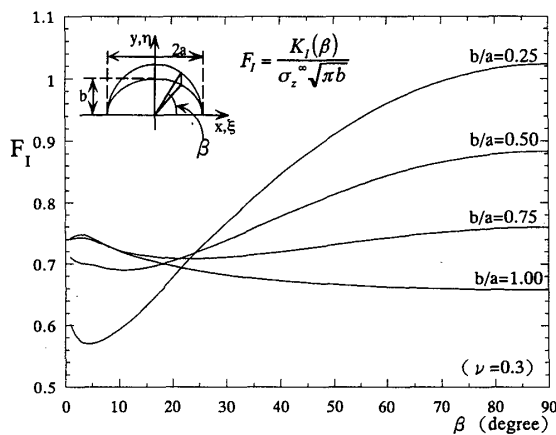
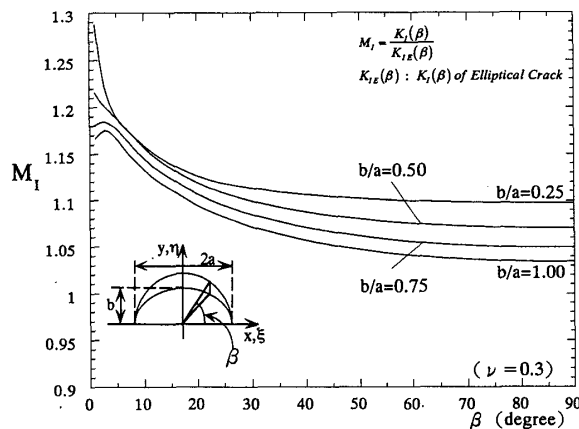
| $\beta$ (deg) |        | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 15     | 20     |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| b/a           |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| 1.00          |        | 0.742  | 0.746  | 0.748  | 0.746  | 0.742  | 0.738  | 0.733  | 0.729  | 0.725  | 0.721  | 0.7078 | 0.6969 |
| 0.75          |        | 0.740  | 0.742  | 0.743  | 0.741  | 0.739  | 0.735  | 0.732  | 0.728  | 0.725  | 0.722  | 0.7136 | 0.7091 |
| 0.50          |        | 0.710  | 0.704  | 0.702  | 0.700  | 0.698  | 0.696  | 0.694  | 0.692  | 0.691  | 0.690  | 0.6936 | 0.7044 |
| 0.25          |        | 0.601  | 0.583  | 0.573  | 0.570  | 0.570  | 0.572  | 0.576  | 0.581  | 0.587  | 0.593  | 0.6315 | 0.6767 |
| 25            | 30     | 35     | 40     | 45     | 50     | 55     | 60     | 65     | 70     | 75     | 80     | 85     | 90     |
| 0.6889        | 0.6821 | 0.6771 | 0.6729 | 0.6695 | 0.6667 | 0.6645 | 0.6627 | 0.6612 | 0.6601 | 0.6593 | 0.6587 | 0.6583 | 0.6585 |
| 0.7088        | 0.7109 | 0.7148 | 0.7197 | 0.7253 | 0.7312 | 0.7370 | 0.7424 | 0.7473 | 0.7515 | 0.7549 | 0.7574 | 0.7592 | 0.7598 |
| 0.7200        | 0.7382 | 0.7574 | 0.7767 | 0.7953 | 0.8128 | 0.8287 | 0.8429 | 0.8552 | 0.8653 | 0.8732 | 0.8788 | 0.8823 | 0.8835 |
| 0.7233        | 0.7661 | 0.8069 | 0.8446 | 0.8787 | 0.9092 | 0.9360 | 0.9592 | 0.9789 | 0.9950 | 1.0074 | 1.0162 | 1.0216 | 1.0234 |

表 3 き裂前縁における  $M_I(\nu=0.3)$ 

$$M_I = K_I(\beta) / K_{IE}(\beta)$$

| $\beta$ (deg) |        | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 15     | 20     |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| b/a           |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| 1.00          |        | 1.166  | 1.172  | 1.175  | 1.172  | 1.166  | 1.159  | 1.151  | 1.145  | 1.139  | 1.133  | 1.1118 | 1.0947 |
| 0.75          |        | 1.180  | 1.183  | 1.184  | 1.181  | 1.177  | 1.170  | 1.164  | 1.157  | 1.151  | 1.145  | 1.1240 | 1.1068 |
| 0.50          |        | 1.215  | 1.206  | 1.200  | 1.194  | 1.188  | 1.182  | 1.175  | 1.168  | 1.163  | 1.157  | 1.1348 | 1.1190 |
| 0.25          |        | 1.287  | 1.245  | 1.217  | 1.201  | 1.189  | 1.181  | 1.175  | 1.169  | 1.164  | 1.159  | 1.1382 | 1.1265 |
| 25            | 30     | 35     | 40     | 45     | 50     | 55     | 60     | 65     | 70     | 75     | 80     | 85     | 90     |
| 1.0821        | 1.0714 | 1.0636 | 1.0570 | 1.0517 | 1.0473 | 1.0438 | 1.0410 | 1.0386 | 1.0369 | 1.0356 | 1.0347 | 1.0341 | 1.0344 |
| 1.0945        | 1.0847 | 1.0771 | 1.0708 | 1.0658 | 1.0618 | 1.0585 | 1.0557 | 1.0536 | 1.0519 | 1.0507 | 1.0498 | 1.0497 | 1.0496 |
| 1.1077        | 1.0992 | 1.0926 | 1.0874 | 1.0832 | 1.0800 | 1.0773 | 1.0752 | 1.0736 | 1.0723 | 1.0712 | 1.0704 | 1.0700 | 1.0700 |
| 1.1188        | 1.1129 | 1.1087 | 1.1059 | 1.1037 | 1.1020 | 1.1006 | 1.0996 | 1.0989 | 1.0984 | 1.0979 | 1.0975 | 1.0974 | 1.0974 |

図 11 境界条件の満足度 ( $n=8, b/a=1.0$ )図 13 境界条件の満足度 ( $n=18, b/a=1.0$ )図 12 境界条件の満足度 ( $n=13, b/a=1.0$ )図 14 境界条件の満足度 ( $n=18, b/a=0.25$ )

図 15 き裂前縁における無次元化応力拡大係数  $F_I$ 図 16 き裂前縁における  $M_I$ 

本研究ではこのような関数の重ね合わせ(一次結合)により境界条件  $\sigma_z = -1$  を満足させる。

ここで注目点(選点)の選び方としては図 10 のようにき裂前縁の位置を半径 1 の円に写像して幅 0.02 のメッシュを  $x'$  軸,  $y'$  軸について切る。そして,  $x'^2 + y'^2 < 1$ ,  $x' \geq 0$ ,  $y' \geq 0$  の範囲で図 10 に示す格子上的点を境界条件を満足する選点として選んだ。

しかし  $y' = 0$  上では式(8)の  $B_i$ , 式(9)の  $A_{2i}$  が求められないため  $y' = 0$  の代わりに  $y' = 0.015$  と,  $x'$  方向に切ったメッシュの交点を自由表面に最も近い選点として使用した。式(6)で表される連立一次方程式を解く際には, 図 10 のようにとった注目点それぞれに対し誤差ができる限り小さくなるように, 最小二乗法を用いた。

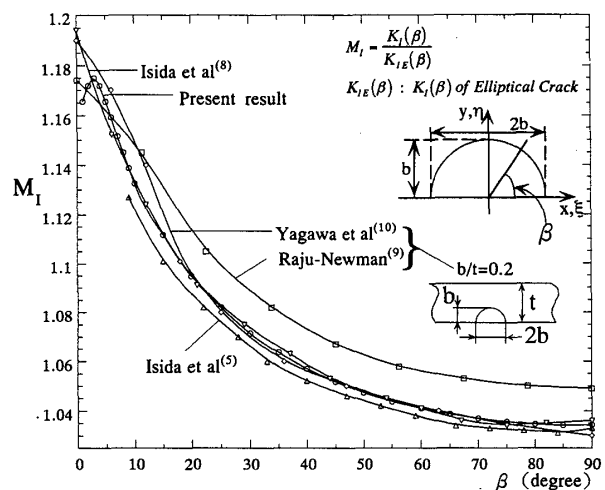
まず形状比  $b/a = 1.0, 0.25$  のき裂について, 近似する式(7)の多項式の次数  $n$  を変化させたときのき裂前縁に沿った応力拡大係数  $F_I$  の収束性をそれぞれ表 1(a), (b) に示す。表 1 に示すようにき裂前縁での応力拡大係数は表面付近で収束性が若干悪いものの,

表 4 応力拡大係数の最大値  $F_{I \max}$   
および  $F_{I \max}^*$  とその発生位置  $\delta$ 

| $b/a$<br>( $a=1.0$ ) | $F_{I \max}$ | $\beta$ (deg) | $F_{I \max}^*$ | $\delta$ (°) |
|----------------------|--------------|---------------|----------------|--------------|
| 1.00                 | 0.748        | 3             | 0.668          | +2.7         |
| 0.75                 | 0.7598       | 90            | 0.6316         | -2.9         |
| 0.50                 | 0.8835       | 90            | 0.6636         | +2.0         |
| 0.25                 | 1.0234       | 90            | 0.6464         | -0.6         |

$$F_{I \max}^* = \frac{K_{I \max}}{\sigma_z \sqrt{\pi \sqrt{area}}} = \sqrt{\frac{b}{area}} F_{I \max}$$

$$\delta = (F_{I \max}^* - 0.650) \times 100 / F_{I \max}^*$$

図 17 既存の解との比較 ( $b/a=1.0, \nu=0.3$ )

$0^\circ \sim 10^\circ$  では有効数字 3 けた,  $15^\circ \sim 90^\circ$  では 4 けたの収束性が得られている。

次に形状比  $b/a = 1.0$  のとき未知関数  $F(\xi', \eta')$  の多項式近似の次数  $n$  を 8, 13, 18 と変化させたときの境界条件の満足度を図 11~13 に示す。次数を  $n=8$  から増加させるにつれて境界条件の満足度はよくなり,  $n=18$  のときに  $\eta' \geq 0.015$  の範囲の仮想き裂上のすべての点で境界条件は  $3 \times 10^{-3}$  以下で満足されている。また図 14 に示すように形状比が変化しても同程度の境界条件の満足度が得られている。

次にき裂の形状  $b/a$  が 1.0, 0.75, 0.5, 0.25 の場合のき裂前縁に沿っての  $F_I$  と  $M_I$  の値を表 2, 3 に示す。またそれらをグラフ化して図 15, 16 に示す。本研究での結果は  $0.015 \leq \eta' \leq 1$  の範囲で  $3 \times 10^{-3}$  以下の境界条件を満足させているのでここでは  $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$  の範囲の結果を示した。

一般に前縁が自由表面に直交する表面き裂では表面のごく近傍で  $K_I$  の極大値を生じ, 前縁と自由表面の交点では  $K_I$  は急落すると考えられている。本報では形状比 1.0, 0.75 の場合に  $\beta \sim 3^\circ$  でそれぞれ  $K_I$  の極大値 0.748, 0.743 という値 ( $F_I$  で表示) を得た。

形状比  $b/a=1.0$  の場合の  $M_I$  の値の分布の様子を石田らの解<sup>(5)(8)</sup>, Raju-Newman の解<sup>(9)</sup>, 矢川らの解<sup>(10)</sup> と比較して図 17 に示す。石田らの結果<sup>(8)</sup> は本解析結果によく一致している。

表 4 は村上ら<sup>(6)</sup> の提案する任意形状の表面き裂の応力拡大係数の最大値をき裂の投影面積の平方根  $\sqrt{area}$  で整理する近似式(16)の有効性を確かめたものである。村上らの近似式は誤差 3%程度以内で半だ円表面き裂の応力拡大係数の最大値を与えていることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} K_{I\max} &= 0.650 \times \sigma_z \sqrt{\pi \sqrt{area}} \\ area &= \pi ab/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

## 5. 結 言

本論文では三次元き裂問題において体積力法の特異積分方程式を数値的に精度よく解析する方法を検討した。その結果未知関数である体積力対密度を基本密度関数と多項式の積で近似することによってき裂先端の滑らかな応力拡大係数の分布と高い境界精度の満足度

が得られることが明らかとなった。提案する方法は種々の三次元き裂問題へ適用可能な有力な方法であると思われる。

## 文 献

- (1) 西谷・村上, 機論, **40**-329(1974), 31.
- (2) Weaver, J., *Int. J. Solids Struct.*, **13**-4(1977), 321.
- (3) 林・阿部, 機論, **46**-408, A(1980), 886.
- (4) 石田・野口, 機論, **48**-429, A(1982), 607.
- (5) Isida, M., ほか 2 名, *Int. J. Fract.*, **26**(1984), 157.
- (6) 村上・石田, 機論, **50**-455, A(1984), 1359.
- (7) 石田・野口・鶴, 機論, **59**-561, A(1993), 1270.
- (8) 野口・石田・鶴, 機論, **59**-561, A(1993), 1279.
- (9) Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr., *Eng. Fract. Mech.*, **11**(1979), 817.
- (10) Yagawa, G., ほか 2 名, *Proc. 1 st Conf. on Num. Meth. in Fract. Mech.*, (1978), 249, Swansea.
- (11) 高久田・小泉・渋谷, 機論, **50**-454, A(1984), 1183.
- (12) Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, (1923), Yale Univ. Press.
- (13) 野田・梅木・F. Erdgan, 機論, **55**-520, A(1989), 2521.
- (14) 野田・小田・陳, 機論, **56**-532, A(1990), 2405.
- (15) 野田・小田・増田, 機論, **57**-542, A(1991), 2332.
- (16) 野田・松尾, 機論, **58**-555, A(1992), 2179.
- (17) 野田・松尾, 機論, **59**-559, A(1993), 785.